МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
Кафедра інформаційних технологій ННІПП

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Методичні рекомендації

Київ
2025

УДК 51-02(075)
В92

Укладачі:

Кудінов В. А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій ННІ права та психології Національної академії внутрішніх справ;

Пакриш О. Є. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій ННІ права та психології Національної академії внутрішніх справ;

Тарасенко В. П. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій ННІ права та психології Національної академії внутрішніх справ.

Рецензенти:

Галицька І. Є. – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет України «КПІ» ім. Сікорського;

Кобець М. В. – кандидат юридичних наук, старший науковий співробітник, Національна академія внутрішніх справ

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методчною радою Національної академії внутрішніх справ 19 червня 2025 року (протокол № 6)

Матеріали подано в авторській редакції.

В92 **Вища** математика для менеджерів [Текст] : метод. рек. / [В. А. Кудінов, О. Є. Пакриш, В. П. Тарасенко]. – Київ : Нац. акад. внутр. справ, 2025. 64 с.

Методичні рекомендації призначені для полегшення засвоєння окремих розділів навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика», яку викладають для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр за спеціальністю «Менеджмент» в Національній академії внутрішніх справ.

Видання рекомендується для студентів, курсантів та науково-педагогічних працівників закладів вищої освіти МВС України, які займаються науковою роботою і у яких виникла потреба в отриманні базових знань з вищої математики, а також може бути корисним для слухачів докторантури й аспірантури, наукових і практичних працівників правоохоронних органів.

УДК 51-02(075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Вища та прикладна математика» є однією з фундаментальних загальноосвітніх дисциплін, що складають теоретичну основу підготовки здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр за спеціальністю «Менеджмент». Знання та вміння, отримані студентом під час вивчення даної навчальної дисципліни, використовуються в подальшому при вивченні багатьох наступних дисциплін професійної підготовки фахівця з базовою та повною вищою освітою.

Методичні рекомендації, в першу чергу, призначені для методичного забезпечення засвоєння основних розділів першої частини (вища математика) навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» здобувачами ступеня вищої освіти бакалавр за спеціальністю «Менеджмент».

Методичні рекомендації охоплюють основні теми означеної дисципліни і містять стислий теоретичний матеріал, основні формули, визначення й правила, підкріплені певною кількістю розглянутих прикладів і задач. Для практичних занять і самостійної роботи пропонується достатня кількість типових вправ, які повністю охоплюють відповідні теоретичні положення дисципліни, сприяють розвитку практичних навичок щодо вирішення складних професійних питань та розвитку аналітичного мислення.

Метою методичних рекомендацій є:

- допомогти опанувати студентам основи лінійної та векторної алгебр, аналітичної геометрії, математичного аналізу;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективних методик розв'язання задач.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використання конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них наведено в рекомендованій літературі.

Крім здобувачів ступеня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю «Менеджмент», методичні рекомендації також можуть бути корисними для курсантів, студентів, слухачів докторантури й аспірантури, наукових і практичних працівників органів та підрозділів системи МВС України, які займаються науковою роботою і потребують знань з базових математичних методів для обробки та систематизації результатів наукових досліджень або планують в подальшому службу в технічних підрозділах Збройних сил України. Окремі розділи методичних рекомендацій можуть бути використані під час обгрунтування деяких положень дисципліни «Математичні методи в психології» для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр за спеціальністю «Психологія».

ПЕРЕЛІК ДЕЯКИХ МАТЕМАТИЧНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$	квантор загальності (для «будь-якого» або «кожний»)
$\exists$	квантор існування («існує» або «знайдеться»)
$\Leftrightarrow$	еквівалентність («тоді і тільки тоді, коли…»)
$\Rightarrow$	імплікація (А $\Rightarrow$ В, тобто з того що вірно А, випливає, що вірним є В)
$\in$	приналежність (а $\in$ А, тобто а належить до множини А)
$\notin$	заперечення приналежності(«не належить»)
$\cup$	об’єднання множин
$\cap$	перетин множин
$\subset$	підмножина (А$\subset$В, тобто А включається до В)
$\setminus$	різниця множин (А\В, тобто А без В)
$\varnothing$	порожня множина (не містить жодного елемента)
$\{\ ,\ \}$	перелік елементів множини або їх властивостей
( )	матриця
[ ]	ціла частина числа
| |	модуль числа, його абсолютна величина; визначник матриці
$\sum_{i=1}^{n}$	сума елементів від першого до того, що має номер n
$\prod_{i=1}^{n}$	добуток елементів від першого до того, що має номер n
!	факторіал (n! – добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно)

РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

В даному розділі основна увага приділяється матрицям, визначникам і системам лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки в наукових дослідженнях, пов'язаних з оптимізацією управлінської діяльності, широко використовуються різні матричні моделі – модель міжгалузевого балансу, моделі транспортних перевезень, моделі керування чергами та інші. Лінійні моделі, які зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей, з досить високою точністю відповідають описуваним ними явищам. За допомогою цих моделей вирішується багато управлінських задач, детальний опис та методи рішення яких розглядаються в межах іншої математичної дисципліни, яка має назву дослідження операцій.

Розділ містить теоретичні відомості з лінійної алгебри, приклади та рекомендації щодо розв'язання типових задач, завдання для самостійного виконання, варіанти завдань для проведення підсумкового контролю з даної теми.

1.1. Матриці та визначники

Теоретичні відомості

Означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця елементів, що складається з m рядків та n стовпців.
Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots$.
Прямокутну матрицю розмірності $m \times n$ позначають:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij}– елемент матриці, i – рядок, j – стовпець, в якому знаходиться елемент.
Означення. Матриця розмірності $1 \times m$ називається *матрицею-рядком*:

$$A = (a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, \ldots\, a_{1m}) .$$

Означення. Матриця розмірності $m \times 1$ називається *матрицею-стовпцем*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою матрицею* і позначається літерою O.
Означення. Дві матриці A та B називаються *рівними*, якщо вони однакової розмірності і всі відповідні елементи двох матриць рівні.

Означення. Матриця розмірності $n \times n$ називається *квадратною*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кількість рядків і стовпців квадратної матриці визначає її порядок.

Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці.

Елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, a_{4n-3}, \dots, a_{n1}$ утворюють *бічну діагональ* квадратної матриці.

Означення. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи крім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють нулю. Одиничну матрицю позначають *E*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Дії над матрицями

1. *Сумою* двох матриць *A* та *B* однакової розмірності є матриця *C* тієї ж розмірності, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A* та *B*: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. *Добутком матриці A* на число λ є матриця, кожен елемент якої є добутком відповідного елемента матриці *A* на число λ:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця -*A* називається *протилежною* до матриці *A*, якщо $-A = -1 \cdot A$.

Означення. *Лінійною комбінацією* двох матриць *A* та *B* називається матриця $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, де $\alpha, \beta \in R$.

Означення. Матриці A та B називаються *узгодженими*, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

3. *Добутком двох узгоджених матриць* A та B є матриця C, кожен елемент якої c_{ij} є сумою добутків відповідного i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B.

Наприклад:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot1+0\cdot(-1)+2\cdot1 & -1\cdot1+0\cdot0+2\cdot2 & -1\cdot4+0\cdot2+2\cdot3 \\ 1\cdot1+4\cdot(-1)+3\cdot1 & 1\cdot1+4\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot4+4\cdot2+3\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}_{2\times3}.$$

Зауваження: $A \cdot B \neq B \cdot A$. Якщо ж $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці A та B називаються *переставними*.

3. *Транспонування матриць*: матриця A^{T} називається транспонованою до матриці A, якщо її рядки дорівнюють стовпцям матриці A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо $A^{\mathrm{T}} = A$ і *косиметричною*, якщо $A^{\mathrm{T}} = -A$.

Перелік властивостей операцій над матрицями:

1. $A+B = B+A$;
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$;
3. $A+O = A$;
4. $\lambda\cdot(\mu\cdot A) = (\lambda\cdot\mu)\cdot A$;
5. $\lambda\cdot(A+B) = \lambda\cdot A+\lambda\cdot B$;
6. $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A+\mu\cdot A$;
7. $\lambda\cdot(A\cdot B) = (\lambda\cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda\cdot B)$;
8. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$;
9. $A\cdot(B+C) = A\cdot B+A\cdot C$;
10. $A\cdot E = A$;
11. $A\cdot O = O$;
12. $0\cdot A = O$.

1.3. Визначники

Числовою характеристикою матриці є визначник. Поняття визначника вводиться лише для квадратної матриці і позначають:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

де: n – порядок визначника.

Означення. *Визначник* – це число, яке дорівнює сумі добутків елементів взятих по одному з кожного рядка та стовпця з відповідним знаком (+ або –). У даній сумі доданків буде $n!$, а кількість множників у кожному добутку дорівнює *n*. Знак «+» перед добутком буде в випадку парної кількості інверсій, а «–» – в випадку непарної.

Визначник *першого* порядку дорівнює самому елементу:

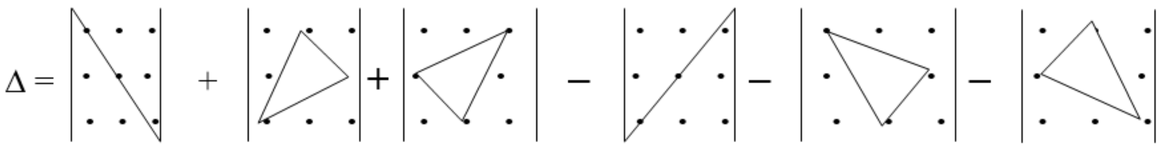
$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}.$$

Визначник *другого* порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів бічної діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

.

Визначник *третього* порядку обчислюють за “правилом трикутника”:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33}$$

1.4. Властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться в результаті транспонування: $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$.
2. Визначник змінить знак на протилежний, якщо поміняти місцями два рядки (стовпці).
3. Спільний множник елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.
4. Визначник дорівнює нулю, якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю.
5. Визначник дорівнює нулю, якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні або пропорційні.

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне і те ж число відмінне від нуля.

Означення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} матриці *n* порядку називають визначник матриці *n-1* порядку, який отримують з даного визначника викреслюванням *i*-го рядка та *j*-го стовпця.
Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} є величина мінора з знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.
7. Визначник дорівнює сумі добутків довільного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення.
8. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

1.5. Визначники вищих порядків

На основі вище згаданих означень та властивостей можна дати наступне визначення визначника *n* порядку: *визначником n порядку*, що відповідає квадратній матриці порядку *n*, називається число, яке дорівнює сумі добутків довільного рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

де $i = \overline{1,n}$.

Понижують порядок визначника, за допомогою розкладу за елементами рядка чи стовпця.
Якщо *n* велике, то понижати порядок визначника доведеться багатократно. На практиці, за допомогою властивості 6 визначник перетворюють так, щоб у деякому рядку (стовпці) всі елементи крім одного дорівнювали нулю.

1.6. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до матриці A, якщо виконується умова:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця.
Обчислюється обернена матриця за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \ldots\ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \ldots\ldots\ A_{n2} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ A_{1n}\ A_{2n} \ldots\ldots\ldots A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці А .

Тобто $A^{-1} = \frac{1}{\triangle} \cdot \tilde{A}$, де $\tilde{A}$ транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів a_{ij} матриці A.

Приклади розв'язування задач

1.1 Знайти **A**+3**B**, якщо

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання***.** Згідно означення суми матриць та множення матриці на число маємо:

$$\boldsymbol{A}+3\,\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-3 & 1+6 & -1+0 \\ 1+3 & 0+6 & 3+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2. Обчислити добуток **A·B** матриць

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання***.** Згідно означення добутку матриць маємо:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot2+2\cdot(-1) & 1\cdot4+0\cdot5+2\cdot(-3) \\ 4\cdot1+1\cdot2+3\cdot(-1) & 4\cdot4+1\cdot5+3\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.3. Представити верхню трикутну матрицю

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

у вигляді добутку діагональної матриці та верхньої трикутної матриці з одиницями на головній діагоналі.

Розв'язання. Скориставшись правилом множення діагональної матриці на довільну матрицю, представимо матрицю **A** у вигляді

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha a & \alpha b\\ 0 & \beta & \beta c\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}.$$

Отже маємо:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha a & \alpha b\\ 0 & \beta & \beta c\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Прирівнюємо відповідні елементи матриць та розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha=3;\\ \alpha a=3;\\ \alpha b=1\\ \beta=-2;\\ \beta c=1;\\ \gamma=3.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=3;\\ a=1;\\ b=\dfrac{1}{3};\\ \beta=-2;\\ c=-\dfrac{1}{2};\\ \gamma=3.\end{cases} \text{ Тобто } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \dfrac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.4. Знайти обернену матрицю для матриці:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Користуючись формулою $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\left(\overline{A}\right)^{T}$, знайдемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5+2\cdot5+3\cdot5=30\neq0.$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},\ A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=11,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=7,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ -1 & 11 & 7 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \left(\overline{A}\right)^T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 5 & 11 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 5 & 11 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{30} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

<u>Перевірка:</u>

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 5 & 11 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

<u>Відповідь:</u> $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{30} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$.

1.7. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розмірності $m\times n$. В даній матриці виділимо будь-яких k рядків і таку саму кількість стовпців.

Число k не повинно перевищувати меншого значення з кількості рядків чи стовпців заданої матриці, тобто $k\le min(m,n)$.

Визначник, який утворится з елементів, що стоять на перетині виділених k рядків та k стовпців називається **мінором *k*-го порядку** матриці А**.**

Рангом матриц називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів. Його позначають через ***r*** або ***rang(A)***.

ВЛАСТИВОСТІ РАНГУ МАТРИЦІ

1. Ранг матриці рівний нулю лише для нульової матриці. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу.
2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m чи n, тобто $0 \leq r \leq \min(m,n)$.
3. Для квадратної матриці n-го порядку $r=n$ тільки тоді, коли матриця невироджена.
4. У випадку квадратної матриці, якщо $r<n$ то визначник матриці дорівнює нулю.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦЬ

1. Транспонування, тобто заміна кожного рядка стовпчиком з тим ж номером і навпаки.
2. Перестановка двох рядків або двох стовпчиків.
3. Множення всіх елементів рядка або стовпчика на будь-яке число не рівне нулю.
4. Додавання до всіх елементів рядка або стовпчика відповідних елементів паралельного ряду, помноженого на одне і те ж число.

Матриці, одержані одна з другої елементарними перетвореннями, називаються **еквівалентними**. Еквівалентні матриці не рівні одна одній, але при елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється. Якщо матриці A і B еквівалентні, то це записують так: $A \Leftrightarrow B$.

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Матриці A та B називають **еквівалентними матрицями**, якщо від матриці А до матриці В перейшли за допомоги елементарних перетворень над рядками; позначають $A \sim B$.
Розглянемо два основних методи знаходження рангу матриці.

Перший метод: метод обвідних мінорів (метод окантування) – полягає у наступному:
Якщо всі мінори 1-го порядку, тобто елементи матриці, рівні нулю, то $r=0$.
Якщо хоч один із мінорів 1-го порядку не дорівнює нулю, а всі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, то $r=1$.
Якщо мінор 2-го порядку відмінний від нуля, то досліджуємо мінори 3-го порядку. Таким способом знаходять мінор k-го порядку і перевіряють, чи не дорівнюють нулю мінори $k+1$-го порядку.

Якщо всі мінори *k+1*-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці $A(a_{ij})_{m,n}$ дорівнює числу *k*. Такі мінори *k+1*-го порядку, як правило, знаходять шляхом "окантування " мінора *k*-го порядку.
При знаходженні рангу матриці першим способом, як правило, треба обчислювати велику кількість визначників. Щоб полегшити задачу студентам давним-давно знайдені елементарні перетворення за допомогою яких можна, злегка помінявши вигляд матриці, без обчислення визначників порахувати ранг.

Другий метод: за допомогою елементарних перетворень матриці – полягає у наступному: визначення рангу матриці полягає в застосуванні елементарних перетворень матриці при зведенні її до діагонального вигляду. Ранг такої матриці дорівнює кількості відмінних від нуля діагональних елементів.
Розглянемо приклади застосування кожного методу.

Приклад 1. Знайти ранг матриці *A* методом окантування.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Матриця $A(a_{ij})_{4,5}$ містить ненульові елементи мінори 1-го порядку, отже її ранг може бути рівний одиниці. Згідно правила ранг матриці не перевищує чотирьом $r<=4$. Мінор 2-го порядку

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 12 = 0$$

рівний нулю, але наступний мінор

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 14$$

відмінний від нуля. Окантовуючи мінор другого порядку перевіримо третій: для цього розкладемо його по третьому стовпчику

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot M_2 = 14$$

Розглянемо мінор четвертого порядку, що окантовує даний

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Він рівний нулю, оскільки останній рядок нульовий. Лишається обчислити ще один мінор

$$M_5 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 12 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1}(-2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 12$$

Шуканий ранг матриці рівний чотирьом *(r=4)*. На прикладі можна бачити, що вибір окантування не завжди можна вдало вибрати і потрібно числити велику кількість мінорів.

Приклад 2. Знайти ранг матриці *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. 1. Переставимо четвертий стовпець на перше місце, а всі решта змістимо вправо.
2. Занулимо всі елементи в першому рядку після 1. Для цього до 2,3,4,5 стовпців додамо перший помножений на -3; -2; 2; -5 відповідно.
3. Третій стовпець поділимо на 6. До четвертого і п'ятого стовпців додамо третій, помножений на -1;-3.
4. До п'ятого стовпця додамо четвертий, помножений на 2.
5. Переставимо третій і четвертий стовпці на друге і третє місця, а другий стовпець на місце четвертого.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

В вихідній матриці викреслемо останній стовпець з нульовими елементами

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ранг еквівалентної матриці рівний чотирьом, а отже і *rang(A)=4*. Можна побачити, що матриці в першому і другому прикладах еквівалентні між собою (мають однакові ранги). Таим методом обчислють ранги набагато більших за розміром матриць, розроблені машинні алгоритми, які дозволяють автоматизувати перевірку рангу матриць.

1.8. Системи лінійних алгебричних рівнянь та методи їх розв’язання

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі змінні, що знаходяться в першій степені (лінійні). Коефіцієнти при невідомих a_{ij} утворюють головну матрицю системи, яку позначають:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Невідомі змінні складають матрицю-стовпець невідомих:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти $b_1, b_2, \ldots, b_m$ утворюють матрицю-стовпець вільних членів:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Дану систему (1.1) можна записати в матричній формі:

$$A \cdot X = B \tag{1.2}$$

Означення. Якщо матриця B є нульовою, то система називається *однорідною*.

Означення. Якщо матриця B не нульова, то система називається *неоднорідною*.

Означення. Числа $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ є *розв'язком* системи (1.1), якщо при підстановці $x_i = c_i$ всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Розв'язати систему означає знайти всі її розв'язки.

Означення. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Означення. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має один розв'язок і *невизначеною* – коли безліч.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

де головна матриця невироджена, тобто $\Delta \neq 0$.

I. *Матричний спосіб.*

Нехай задана система в матричній формі (1.2), тоді розв'язок матричного рівняння шукаємо в вигляді:

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{1.3}$$

Отже, щоб розв'язати систему матричним способом, необхідно знайти обернену матрицю до головної матриці системи A^{-1} і помножити її на стовпець вільних членів, в результаті отримаємо матрицю-стовпець невідомих.

II. *Метод Крамера.*

Використаємо рівняння (1.3). Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Чисельники отриманих дробів є розкладами визначників Δ_i за елементами i-стовпців вільних членів, підставлених у головний визначник системи.

Отже, обчислюємо додатково визначники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Δ_i – це визначник, отриманий з головного визначника Δ заміною відповідного i-го стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \ldots \text{ і.т.д.}$$

Знаходимо невідомі змінні x_i за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

III. *Метод Гауса (метод виключення змінних).*

Метод Крамера та матричний спосіб не є зручним для випадку великого значення n, а також не застосовні для випадку виродженої та прямокутної головної матриці системи. Тому розглянемо універсальний метод розв'язання систем лінійних рівнянь, а саме метод Гауса.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими (1.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Запишемо *розширену матрицю* системи (1.1), яку дістаємо з головної матриці A приєднанням стовпця вільних членів:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Прямий хід методу Гауса. Зводимо розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою еквівалентних перетворень. Можливі наступні випадки:

1) $$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

2) $$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right)$$

3)

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a'_{m(n-1)} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

Зворотний хід методу Гауса. За отриманою матрицею східчастого виду записуємо відповідну систему.

Для випадку 1) з останнього рівняння системи знаходимо невідому змінну x_n, підставляємо її значення в попереднє рівняння та знаходимо x_{n-1} і т.д. Таким чином отримуємо єдиний розв'язок системи (1.1).

У випадку 2) система розв'язків немає ($b'_m \neq 0$).

Для випадку 3) з останнього рівняння системи неможливо однозначно знайти змінну x_n чи x_{n-1}, x_{n-2}…У цьому випадку система має безліч розв'язків.

Теорема *Кронекера-Капеллі* (про сумісність системи лінійних рівнянь). Система (1.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг головної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(A|B)$.

Отже, перш ніж розв'язувати систему, потрібно дослідити її на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.

Спочатку знаходимо $r(A)$ та $r(A|B)$ і порівнюємо їх:

- якщо $r(A) \neq r(A|B)$, то система не сумісна, тобто розв'язків немає;
- якщо $r(A) = r(A|B) = r = n$ (n – кількість невідомих), то система має єдиний розв'язок;
- якщо $r(A) = r(A|B) = r < n$, то система має безліч розв'язків.

В останньому випадку вибираємо *r* базисних або головних невідомих та решту *n-r* вільних. І виражаємо базисні невідомі через вільні. Таким чином знаходимо загальний розв'язок системи.

Задачі для самостійного розв'язування (до розділу 1)

Завдання № 1:

а) обчислити суму, різницю та добуток матриць А (табл. 1.1) та В (табл.1.2);

б) для матриць А та В виконати дії : (2А - 3В)·(3А + 2В) ;

в) перевірити рівність ΔА·ΔВ = Δ(А·В), використавши метод трикутників для обчислення визначників;

г) для матриць А та В знайти обернені матриці A^{-1} та B^{-1} , зробити перевірку та обчислити вираз $(A^{-1} + B^{-1})^2$;

Завдання № 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь (табл.1.3) методом Крамера (методом визначників), методом оберненої матриці та методом Гаусса, порівняти результати.

Завдання № 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь 4-го порядку (табл.1.4) методом Гаусса, виписавши розширену матрицю системи і зводячи її до трапецієвидного (або трикутного) виду, застосувавши елементарні перетворення з рядками матриці. Зворотнім ходом відновити систему і знайти її розв'язки.

Завдання № 4. Знайти обернену матрицю для матриці:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix},$$

$$k=\begin{cases} N, \text{ якщо } N\le 12\\ N-12, \text{ якщо } N>12, \text{ де } N \text{ - номер Вашого варіанта}\end{cases}$$

Таблиця 1.1

1 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 5 & 2 & 13\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$	3 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$	5 $\begin{pmatrix}5 & 8 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$
6 $\begin{pmatrix}2 & -4 & 9\\ 7 & 3 & -6\\ 7 & 9 & -9\end{pmatrix}$	7 $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\\ 3 & -2 & -4\end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -4 & -3\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$	9 $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$	10 $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$
11 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{pmatrix}$	12 $\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$	13 $\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 5 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$	14 $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	15 $\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 4 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$
16 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$	17 $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$	18 $\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$	19 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	20 $\begin{pmatrix}5 & 8 & 1\\ 3 & -2 & 6\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Таблиця 1.2

1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	5 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
6 $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	7 $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$	9 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	10 $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
11 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	12 $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	13 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	14 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	15 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
16 $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	17 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 3 \end{pmatrix}$	18 $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$	19 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	20 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Таблиця 1.3

1 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$	3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$	4 $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$
5 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$	6 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$	7 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	8 $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$
9 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	10 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$	11 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	12 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$	14 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	15 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 39 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$	16 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$
17 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$	18 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$	19 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$	20 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9 \end{cases}$

Таблиця 1.4

Варіант 1 $x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 6$ $2x_1 - 2x_3 + x_4 = -6$ $2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1$ $-x_2 + 2x_4 = 4$	Варіант 2 $3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$ $2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$ $3x_3 + x_4 = 9$ $5x_1 - 2x_3 + x_4 = -6$
Варіант 3 $3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -8$ $-x_2 + 3x_4 = 9$ $5x_1 - 2x_3 + x_4 = -6$ $3x_3 - 2x_4 = 0$	Варіант 4 $5x_1 + 2x_2 - x_3 = 11$ $2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 2$ $x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8$ $x_3 - x_4 = -2$
Варіант 5 $x_1 + 3x_2 - 5x_4 = -16$ $2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18$ $4x_1 - 3x_4 = -13$ $-3x_3 + 2x_4 = 0$	Варіант 6 $5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1$ $3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5$ $2x_2 - x_4 = -2$ $2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 0$
Варіант 7 $5x_2 + x_3 - 3x_4 = -1$ $x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$ $5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4$ $2x_2 + x_4 = 2$	Варіант 8 $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -6$ $x_1 + x_2 + x_4 = 9$ $3x_1 - 2x_3 = 8$ $5x_2 + 3x_3 = 12$
Варіант 9 $x_1 + 3x_3 - 2x_4 = -3$ $x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 9$ $4x_3 + 2x_4 = 4$ $3x_1 - 4x_2 + 3x_4 = -3$	Варіант 10 $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$ $2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -4$ $x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2$ $2x_2 + x_3 - 4x_4 = -11$
Варіант 11 $5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$ $2x_2 + 3x_4 = 12$ $3x_1 - 5x_3 + x_4 = 5$ $4x_2 - x_3 - 3x_4 = 6$	Варіант 12 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -11$ $2x_1 + 4x_3 = 0$ $-3x_2 + x_3 + 2x_4 = -2$ $3x_1 - x_2 + 2x_4 = 11$

Таблиця 1.4(Продовження)

Варіант 13 $4x_1 - x_4 = 2$ $2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7$ $5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16$	Варіант 14 $4x_1 + 2x_3 - 4x_4 = -10$ $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$ $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 21$ $5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3$
Варіант 15 $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$ $-x_1 + 4x_3 + 3x_4 = -3$ $3x_2 + x_3 - 2x_4 = -4$ $-2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -12$	Варіант 16 $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8$ $2x_2 + x_3 - x_4 = -3$ $3x_1 - x_2 + 2x_4 = 21$ $2x_2 + x_4 = 2$
Варіант 17 $4x_1 - 3x_3 + x_4 = -1$ $2x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 4$ $x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$ $-5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8$	Варіант 18 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ $2x_3 - 2x_4 = 2$ $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -4$ $3x_2 - x_4 = -2$
Варіант 19 $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1$ $-x_1 + 3x_2 - 4x_4 = -9$ $2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2$ $5x_2 + 2x_3 = 1$	Варіант 20 $x_1 - x_4 = 0$ $2x_2 + x_3 - x_4 = -3$ $3x_1 - x_2 + 2x_4 = 21$ $2x_2 + x_4 = 2$

РОЗДІЛ ІІ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАДАЧІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Поняття «вектор», як відрізок, що має певну довжину та певний напрям, вперше було застосовано ірландським математиком Уільямом Гамільтоном (1805 – 1865) в роботах з побудови числових систем. Векторна алгебра тісно пов'язана з лінійною алгеброю, її застосування дає змогу здійснювати геометричну інтерпретацію задач, які виникають під час досліджень управлнської те економічної діяльності. Вектор може вказувати напрям найбільшого зростання або спадання функції, що описує різноманітні економічні, логістичні та виробничі(управлінські) процеси. Поняття лінійного векторного простору має широке застосування в теорії корисності та теорії споживання.

В даному розділі основна увага приділяється векторам та лінійним операціям над ними в декартовій системі координат. Зокрема, наведені теоретичні відомості з векторної алгебри, приклади та рекомендації щодо розв'язання типових задач, завдання для самостійного виконання, варіанти завдань для проведення підсумкового контролю з даної теми.

2.1. Поняття про вектори

Предметом вивчення цього розділу вищої математики є вектори, дії над ними та їх застосування.

Вектор – напрямний відрізок.

Вектор позначається однією малою буквою латинського алфавіту із стрілкою зверху або символом $\overrightarrow{AB}$, де т. А – початок, а т. В – кінець вектора.

Довжиною або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB. Позначається вона $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор називають *нульовим*, якщо початок і кінець його збігаються. Позначають нульовий вектор символом $\vec{0}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним. Такий вектор позначається $\vec{e}$

Вектори, що мають однакові напрямки, називають *співнапрямленими,* а вектори, що мають протилежні напрямки – *протилежнонапрямленими*.

Вектори, що лежать в паралельних площинах, або в одній площини називаються *компланарними.*

Вектори називаються *колінеарними,* якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, співнаправлені і мають однакову довжину.

Два колінеарні вектори, Які мають однакову довжину і протилежно напрямлені, називаються *взаємно протилежними*.

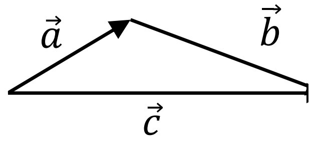
Над векторами можна виконувати *лінійні операції* : додавати, віднімати, множити вектор на число.

2.2. Дії над векторами

Якщо вектори задані направленими відрізками то : *сумою* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених послідовно, є вектор $\vec{c}$. Який сполучає початок першого з кінцем другого. Правило суми двох векторів узагальнюються на суму кількох векторів

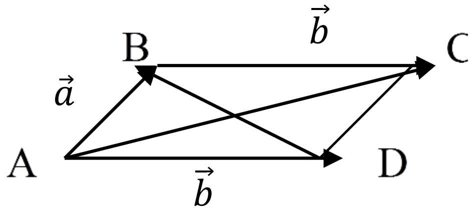
Геометрично вектори можна додавати за правилом трикутника або паралелограма:

а) правило трикутника:



$\vec{a} + \vec{b}$=$\vec{c}$

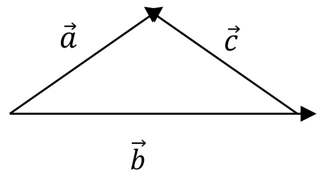
б) правило паралелограма:



$\vec{a} + \vec{b}$=$\overrightarrow{AC}$

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{a} - \vec{b}$=$\vec{c}$; $\vec{c} + \vec{b}$ =$\vec{a}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що виходять з однієї точки, є вектор, який сполучає кінці цих векторів і направлений в сторону того вектора, від якого віднімаємо:



$\vec{a} - \vec{b}$=$\vec{c}$

Геометрично різницю векторів можна знаходити за правилом паралелограма: $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB}$.

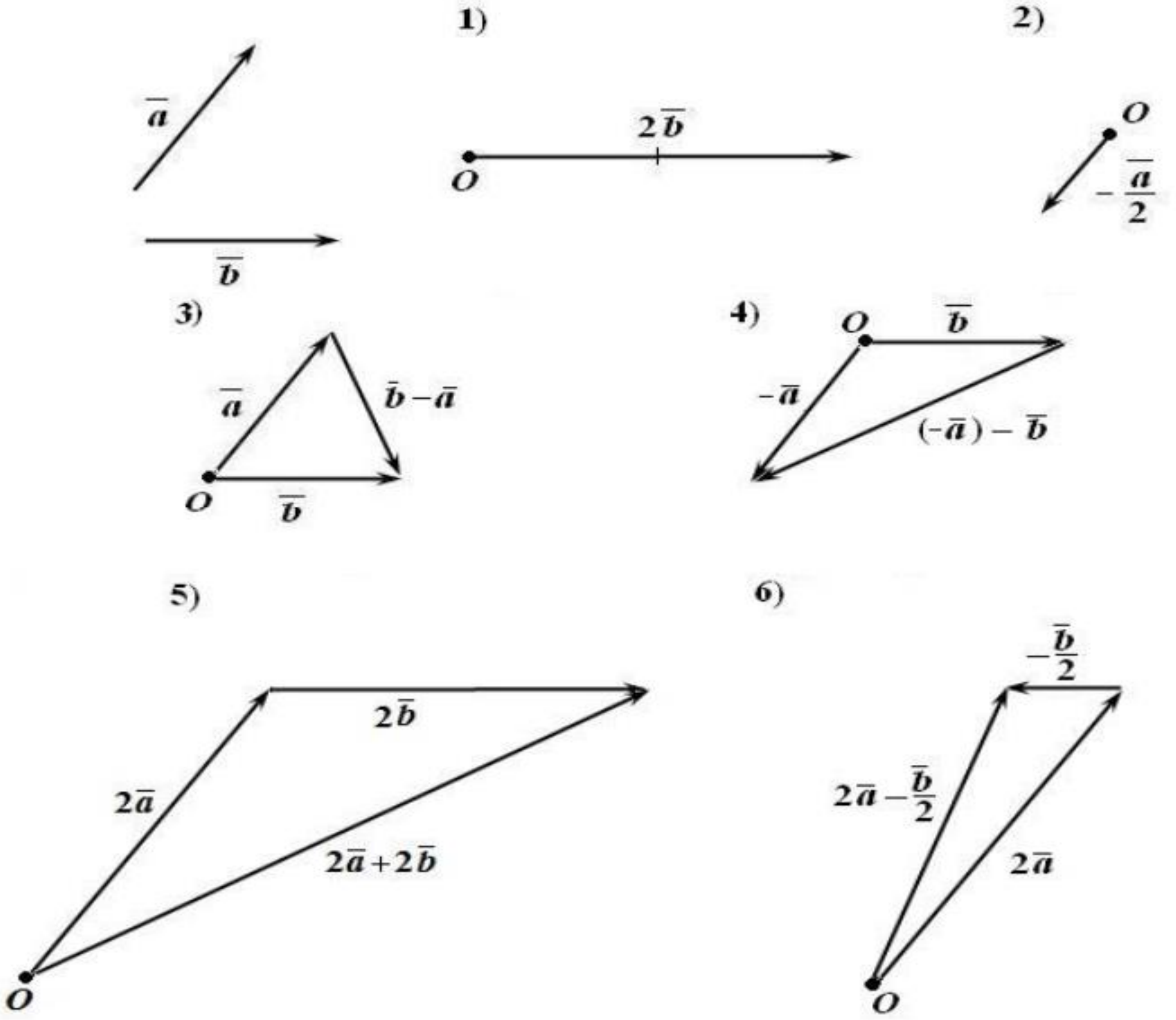
Добутком вектора $\vec{a}$ на число α є вектор, співнаправний з вектором $\vec{a}$, якщо α - число додатне, протилежно направлений з вектором $\vec{a}$, якщо α - від'ємне число. Модуль даного вектора дорівнює $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, причому якщо $|\alpha|<1$, то довжина вектора зменшується, а якщо $|\alpha|>1$,то довжина вектора збільшується.

Операції додавання і множення вектора на число мають такі властивості:

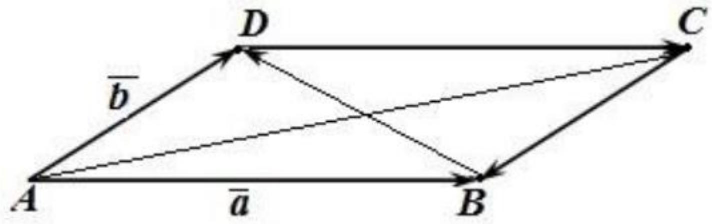
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
6. $\alpha(\beta\vec{a}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
7. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Приклад 1. За даними векторами a і b побудувати наступні вектори: 1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{\vec{a}}{2}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $\overrightarrow{-b}-\vec{a}$; 5) $\overrightarrow{2a}+2\vec{b}$; 6) $2\vec{a}-\frac{\vec{b}}{2}$.

Розв'язання. Задамо на площині довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та будь-яку точку O. Побудуємо вектори 1) – 6), користуючись властивостями додавання, віднімання та множення вектора на число.

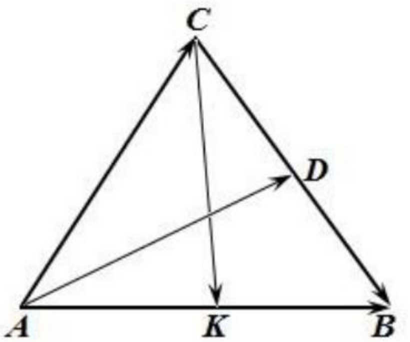


Приклад 2. Дано паралелограм ABCD зі сторонами $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Записати вектори $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Розв'язання. $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Приклад 3. У трикутнику ABC проведено медіани AD і CK. Знайти вектори



$\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CK}$, якщо $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Розв'язання. Очевидно, що вектор $\overrightarrow{AD}$ є сумою векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CD}$, тобто $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$. Оскільки AD – медіана трикутника ABC, то точка D є серединою сторони CB, отже, вектор $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{\vec{b}}{2}$. Тоді $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$. Вектор $\overrightarrow{CK}$ є різницею векторів $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC}$. Далі маємо $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ визначається як сума векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, тоді $\overrightarrow{AK} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ і $\overrightarrow{CK} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.

2.3. Базис. Прямокутна система координат

Базисом на площині називається будь-яка впорядкована пара не колінеарних векторів. За декартовий *прямокутний базис на площині* прийнято два одиничні взаємно перпендикулярні вектори $\vec{i}$,$\vec{j}$ що виходять з одного початку. Дві взаємно перпендикулярні осі на площині, напрямки яких збігаються з напрямками базисних векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$, які мають спільний початок O, називаються осями координат. Першу із вказаних осей називають віссю *абсцис* (або віссю OX), а другу – віссю *ординат* (або віссю OY).

Якщо точка М в базисі $\vec{i},\vec{j}$ має координати x та y, то перша координата називається абсцисою, а друга – ординатою. Той факт, що точка М має координати x і y, символічно позначається так: М(x,y).

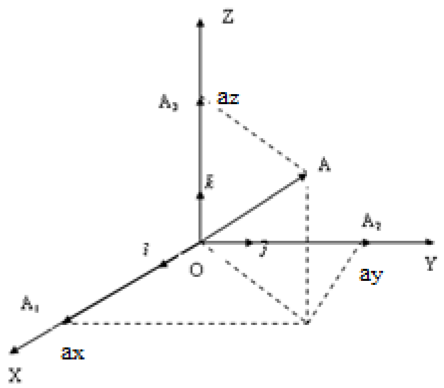
Базисом в просторі називається будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів. Сукупність точки О і базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ називається *декартовою прямокутною системою координат*. Три взаємно перпендикулярні осі в просторі напрямки яких збігаються з напрямками базисних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ і які мають спільний початок О, називаються осями координат. Першу із вказаних осей називають віссю абсцис (або віссю ОХ), а другу – віссю ординат (або віссю ОУ), третю – віссю аплікат (або віссю OZ).

Якщо точка М в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ має координати x, y, z, то перша координата називається абсцисою, а друга – ординатою, а третя - аплікатою. Те, що точка М має координати x, y, z символічно позначається так: M(x,y,z).

Якщо у прямокутній системі координат вектор $\vec{a}$ задається двома точками $A(x_1;y_1;z_1)$ та $B(x_2;y_2;z_2)$, то координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$=($x_2$-$x_1$;$y_2$-$y_1$;$z_2$-$z_1$).

2.4. Розклад вектора за базисними векторами

Розглянемо вектор $\vec{a}$, початок якого знаходиться у початку системи координат. Нехай проекція $\text{пр}_{ox}\vec{a} = OA_1 = a_x$, $\text{пр}_{oy}\vec{a} = OA_2 = a_y$, $\text{пр}_{oz}\vec{a} = OA_z = a_z$.



За правилом додавання векторів маємо: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$.
Вектори $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$ колінеарні відповідно векторам $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

.

Тому $\overrightarrow{OA_1}$=$a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2}$=$a_y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3}$=$a_z\vec{k}$. Отже :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x; a_y; a_z) \qquad (2.1)$$

Співвідношення (2.1) називається *розкладом вектора* $\vec{a}$ по базисним векторам $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$; де (a_x; a_y; a_z) – координати або проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Вектор $\vec{a}$ являється діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$. Тому $|\bar{a}| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}$.

2.5. Лінійні операції над векторами, заданими координатами

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані координатами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{в} = (в_x, в_y, в_z)$

Оскільки проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій, то $\bar{a} \pm \bar{в} = (a_x \pm в_x; a_y \pm в_y; a_z \pm в_z)$, а добуток вектора на λ рівний: $\bar{a} \cdot \lambda = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

Отже, при додаванні векторів їх відповідні координати додаються, а при множенні на число їх координати множаться на це число, тобто, які лінійні операції роблять над векторами, такі й над їх відповідними координатами.

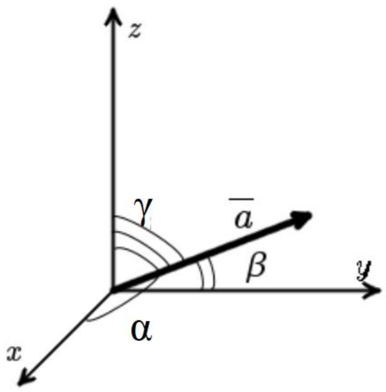
Приклад. Знайти координати вектора $2\bar{a} - 3\bar{в}$, якщо $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}, \bar{в} = 4\bar{j} + 5\bar{k}$.

Розв'язок:

$2\vec{a} - 3\vec{b} = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 0, \ldots 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4, \ldots 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5) = (\ 4;\ -6;\ -17\ ).$

2.6. Напрямні косинуси вектора

Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями кути α, β, γ.



Косинуси кутів, які утворює вектор з осями координат, називаються його *напрямними косинусами*. Так як

$a_x = np_{ox}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha$, $a_y = np_{oy}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\beta$, $a_z = np_{oz}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma$, то

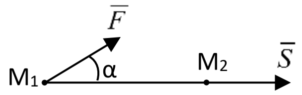
$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$; $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$; $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$ причому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

2.7. Скалярний та векторний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, де α - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Механічний зміст скалярного добутку.



Якщо матеріальна точка під дією сили $\overline{F}$ переміщається з положення M_1 в положення M_2 (вектор переміщення $\overline{S} = \overline{M_1M_2}$, то робота виконана при цьому дорівнює $A = \overline{F} \cdot \overline{S}$

Властивості скалярного добутку

1) При зміні векторів місцями, скалярний добуток не змінюється $\overline{a} \cdot \overline{в} = \overline{в} \cdot \overline{a}$

2) Скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку $(\lambda \cdot \overline{a}\overline{в}) = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{в})$, $(\overline{a} \cdot \lambda\overline{в}) = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{в})$

3) $\overline{a} \cdot (\overline{в} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{в} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

4) Скалярний добуток векторів дорівнює добуткові одного із модулів векторів на проекцію другого на попередній:

$$\overline{a} \cdot \overline{в} = |\overline{a}| \cdot пр_{\overline{a}}\overline{в} \quad \overline{a} \cdot \overline{в} = |\overline{в}| \cdot пр_{\overline{в}}\overline{a} \quad пр_{\overline{a}}\overline{в} = |\overline{в}| \cdot \cos\alpha$$

5) Якщо вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$\overline{a} \cdot \overline{в} = |\overline{a}| \cdot |\overline{в}| \cdot \cos 90^{o} = 0$.

6) Якщо α – гострий кут між векторами, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$ - додатне число, якщо α – тупий кут, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$ - від'ємне число.

Зауваження : Оскільки властивість 5 є достатньою умовою, то вона служить критерієм перевірки перпендикулярності ненульових векторів.

Скалярний добуток в координатах

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами:

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$

Тоді:

$$\overline{a} \cdot \overline{в} = a_x \cdot в_x + a_y \cdot в_y + a_z \cdot в_z .$$

Застосування скалярного добутку

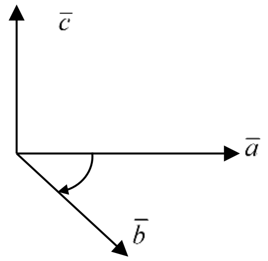
1. Робота виконана силою $\overline{F}$ по переміщенні матеріальної точки вздовж вектора $\overline{S}$: $A = \overline{F} \cdot \overline{S}$
2. Проекція вектора на вектор: $пр_{\overline{в}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{в}}{|\overline{в}|}$; $\quad пр_{\overline{a}}\overline{в} = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{в}}{|\overline{a}|}$.
3. Якщо $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}$.
4. Якщо для двох ненульових векторів $\overline{a} \cdot \overline{в} = 0$, то $\overline{a} \perp \overline{в}$.

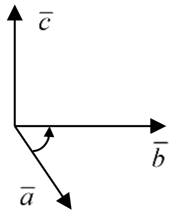
5. Кут між векторами $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{a}||\bar{в}|}$.

Векторний добуток векторів

Означення 1.Трійка векторів $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}$ називається *правою*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ видно, що найменший поворот від $\vec{a}$ до $\overrightarrow{b}$, здійснюється проти годинникової стрілки.

Означення 2.Трійка векторів називається *лівою*, якщо кінця вектора $\vec{c}$ видно найменший поворот від $\vec{a}$ до $\overrightarrow{b}$ здійснюється за годинниковою стрілкою.





Означення 3.*Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b}$, який утворює з ними праву трійку, а модуль його дорівнює: $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{в}|\cdot\sin\alpha$, де $\alpha = (\bar{a}, \bar{в})$.

Фізичний зміст векторного добутку: якщо тверде тіло, закріплене до осі в точці O, рухається навколо неї під дією прикладені сили в точці A, то момент сили $\overline{M} = \bar{r}\times\overline{F}$, де $\vec{r}$ - плече сили.

Властивості векторного добутку

1. При зміні векторів місцями векторний добуток змінює знак на протилежний: $\bar{a}\times\bar{в} = -(\bar{в}\times\bar{a})$, бо міняється трійка векторів.
2. Скалярний множник можна винести за знак векторного добутку: $(\lambda\bar{a}\times\bar{в}) = \lambda(\bar{a}\times\bar{в})$; $(\lambda\bar{в}\times\bar{a}) = \lambda(\bar{a}\times\bar{в})$
3. $\bar{a}\times(\bar{в}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{в} + \bar{a}\times\bar{c}$
4. Якщо вектори колінеарні, то векторний добуток дорівнює 0: $\vec{a}\times\overrightarrow{b}=0$

Зауваження: Властивість 4 являється достатньою умовою колінеарності векторів, тобто, якщо $\vec{a}\times\overrightarrow{b}=0$, то вектори колінеарні

Векторний добуток в координатах

Нехай $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задані координатами:

Знайдемо $\vec{a}\times\overrightarrow{b}$.

$\bar{a}(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})$

$\bar{в}(в_x\bar{i}+в_y\bar{j}+в_z\bar{k})$

$$\bar{a}\times\bar{в} = a_xв_x(\bar{i}\times\bar{i}) + a_xв_y(\bar{i}\times\bar{j}) + a_xв_z(\bar{i}\times\bar{k}) + a_yв_x(\bar{j}\times\bar{i}) + a_yв_y(\bar{j}\times\bar{j}) + a_yв_z(\bar{j}\times\bar{k}) +$$
$$+ a_zв_x(\bar{k}\times\bar{i}) + a_zв_y(\bar{k}\times\bar{j}) + a_zв_z(\bar{k}\times\bar{k}).$$

Так як $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$, $\bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}$, $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$, $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$, $\bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$, $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$, $\bar{i}\times\bar{i}=0$, $\bar{j}\times\bar{j}=0$, $\bar{k}\times\bar{k}=0$, то

$$\bar{a}\times\bar{в}=\bar{i}\left(a_y в_z-a_z в_y\right)-\bar{j}\left(a_x в_z-a_z в_x\right)+\bar{k}\left(a_x в_y - a_y в_x\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\end{vmatrix}$$

Отже $$\bar{a}\times\bar{в}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\end{vmatrix}.$$

Застосування векторного добутку

1. Момент сили $M=\bar{r}\times\bar{F}$.
2. Перевіряється умова колінеарності векторів. Якщо $\vec{a}\times\vec{b}=0$, то вектори - колінеарні.
3. Кут між векторами $\sin\alpha=\dfrac{|\bar{a}\times\bar{в}|}{|a||в|}$.
4. Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку $S|\bar{a}||\bar{в}|\sin\alpha=|\bar{a}\times\bar{в}|$.
5. Площа трикутника, побудованого на векторах як на сторонах $S_\Delta=\dfrac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{в}|$.

Приклад. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}=2\bar{\mathbf{i}}-\bar{\mathbf{j}}+2\bar{\mathbf{k}}$ $\quad \mathbf{в}=3\bar{\mathbf{i}}+2\bar{\mathbf{j}}+\bar{\mathbf{k}}$

Розв'язок:

$$\bar{a}\times\bar{в}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}(-1-4)-\bar{j}(2-6)+\bar{k}(4+3)=-5\bar{i}+4\bar{j}+7\bar{k}$$

$$S=|\bar{a}\times\bar{в}|=\sqrt{(-5)^2+4^2+7^2}=\sqrt{25+16+49}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}\text{ (кв.од.)}$$

Задачі для самостійного розв'язування (до розділу 2)

1. За даними векторами a і b побудувати вектори:
 1) $2\vec{a}$; 2) $-3\vec{b}$; 3) $\vec{a}+2\vec{b}$; 4) $2\vec{a}-3\vec{b}$; 5) $\vec{a}-\vec{b}$.

2. У трапеції ABCD основа AB удвічі більша за основу DC. Виразити вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

3. У трикутнику АВС сторону АВ точками М і N поділили на три рівні частини. Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

4. Чотирикутник ABCD – паралелограм, О – точка перетину його діагоналей, М – довільна точка, відмінна від О. Виразити вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ через вектор $\overrightarrow{MO}$.

5. У рівнобічній трапеції ABCD відомо: нижня основа $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ і кут між ними $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Розкласти через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, що утворюють решту сторін і діагоналі трапеції.

6. У трикутнику АВС проведено медіани *AD, BE* і *CF*. Довести, що $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

7. Дано ромб ABCD. Чи будуть рівними вектори: 1) $\overrightarrow{AD}\ і\ \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AD}\ і\ \overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}\ і\ \overrightarrow{CD}$?

Відповіді:

2. $\overrightarrow{BC} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD}$.

3. $\overrightarrow{CM} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

4. $\vec{a} = 4\overrightarrow{MO}$.

5. $\overrightarrow{BC} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} + \vec{b};\ \overrightarrow{CD} = \frac{|\vec{b}|-|\vec{a}|}{|\vec{a}|};\ \overrightarrow{AC} = \frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{\vec{a}}\vec{a} + \vec{b};\ \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.

7. 1) ні; 2) так; 3) ні.

РОЗДІЛ ІІІ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Аналітичною геометрією називається розділ математики, в якому геометричні задачі розв'язуються алгебраїчними методами. Об'єктом вивчення аналітичної геометрії є геометричні фігури, а предметом – установлення їх властивостей засобами алгебри за допомогою координатного методу. Методи аналітичної геометрії дозволяють надавати геометричну інтерпретацію економіко-математичним моделям задач, які застосовуються для оптимізації управлінської діяльності.

В даному розділі наведені теоретичні відомості з аналітичної геометрії, рівняння прямої, кола, еліпсу, параболи, гіперболи на площині, приклади та рекомендації щодо розв'язання типових задач, завдання для самостійного виконання, варіанти завдань для проведення підсумкового контролю з даної теми.

3.1. Рівняння прямої на площині. Перетин прямих

Теоретичні відомості.

1. Рівняння прямої на площині.
1.1. В декартових координатах кожна пряма визначається рівнянням першого степеня і, навпаки, кожне рівняння першого степеня визначає пряму.
1.2. Рівняння виду $Ax + By + C = 0$ називається загальним або канонічним рівнянням прямої на площині. Якщо пряма задана загальним рівнянням, то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою $k = -\dfrac{A}{B}$.
1.3. Нагадаємо, що кутовий коефіцієнт є тангенсом кута нахилу прямої до осі Ox, а рівняння $y = kx + b$ називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом. Вільний член b в цьому рівнянні дорівнює довжині відрізка, що відтинає на осі Oy дана пряма, рахуючи від початку координат.
1.4. Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ є рівнянням прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k.
1.5. Якщо пряма проходить через точки $M(x_1, y_1)$ та $M(x_2, y_2)$, то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Рівняння $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$ є рівнянням прямої, що проходить через дві точки $M(x_1, y_1)$ та $M(x_2, y_2)$.
1.6. Ознакою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів $k_1 = k_2$
Ознакою перпендикулярності двох прямих є обернені за абсолютною величиною та протилежні за знаком кутові коефіцієнти:

$k_1 k_2 = 1$ або $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Завдання. Вивести умови паралельності та перпендикулярності прямих, заданих загальними рівняннями.

1.7. Нормальне рівняння прямої. Нехай на площині xOy задана пряма. Проведем через початок координат перпендикуляр до даної прямої і назвемо його нормаллю. Позначимо через Р точку перетину нормалі з даною прямою і ввиберемо за додатній напрямок нормалі від точки О до точки Р. Якщо α є полярний кут нормалі, р – довжина відрізка $\overrightarrow{OP}$ то рівняння даної прямої може бути записано у вигляді $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$.

Рівняння такого виду називається нормальним. Якщо дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, то, щоб звести його до нормального виду , треба всі члени цього рівняння домножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Знак нормуючого множника вибираємо протилежним до знаку вільного члена рівняння, що нормується.

1.8. Відстань від точки до прямої. Нехай дано деяку пряму і довільну точку М; позначимо через d відстань від точки до прямої. Відхиленням δ точки М називається число +d, якщо ця точка та початок координат розташовані по різні боки від прямої, та –d, якщо ця точка та початок координат розташовані по один бік від даної прямої (для точок , що лежать на даній прямій $\delta = 0$). Якщо задано координати x^*, y^* точки М, та нормальне рівняння прямої $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$, то відхилення δ точки М обчислюється за формулою: $\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p$.

Щоб знайти відстань d від точки до прямої, достатньо обчислити відхилення і взяти його модуль: $d = |\delta|$

2. Пряма і площина в просторі.

2.1. Проекцією вектора $\overline{A}\overline{B}$ на вісь u називається відрізок $\overline{A_1 B_1}$, де точка A_1 є проекцією на вісь u точки А, а точка B_1 - проекцією на цю вісь точки В.

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь u позначається $|np_u \overline{AB}|$.

Проекція вектора ***a*** на вісь *u* позначається $|np_u a|$.

Властивості проекції:

2.1.1. $|np_u a| = |a| \cos\varphi$, де φ - кут нахилу вектора до осі u.

2.1.2. Проекція суми векторів на деяку вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь $np_u(a_1 + a_2 + ... + a_n) = np_u a_1 + np_u a_2 + ... + np_u a_n$

2.1.2. При множенні вектора на число його проекція множиться на теж саме число. $|np_u \lambda a| = \lambda |np_u a|$

2.1.3. Проекція довільного вектора $S=\{X; Y; Z\}$ на яку-небудь вісь ***u*** визначається формулою $np_u S = Se$, де ***e*** – одиничний вектор, направлений за віссю ***u***. Якщо дані кути α, β, γ, які вісь ***u*** утворює з координатними осями, то ***e***$=\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ і для обчислення проекції вектора ***S*** може використовуватись формула $np_u S = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$.

2.1.4. Довжини проекцій вектора на координатні осі називаються його (декартовими) координатами.

2.2. Якщо α, β, γ кути, які утворює вектор a з координатними осями, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямляючими косинусами вектора a. Напрямляючі косинуси є координатами одиничного вектора, який має той самий напрямок, що і вектор a.

Одиничний вектор, який має той самий напрямок, що і вектор a, називається ортом вектора a і позначається a^0.

Якщо $a=(X,Y,Z)$, $|a|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, то $X=|a|\cos\alpha$, $Y=|a|\cos\beta$, $Z=|a|\cos\gamma$, а також $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

3. Змішаний добуток трьох векторів.

Трійкою векторів називаються три вектори, якщо вказано, який з них вважається першим, який другим і який третім. Трійку векторів записують за порядком нумерації; наприклад, запис ***a***, ***b***, ***c*** означає, що вектор ***a*** вважається першим, вектор ***b*** – другим, ***c*** – третім.

Трійка некомпланарних векторів ***a***, ***b***, ***c*** називається правою, якщо вектори, що її утворюють, після приведення до загального початку, розташовуються у порядку нумерації аналогічно до того, як розташовуються великий, вказівний та середній пальці правої руки. Якщо вектори ***a***, ***b***, ***c*** розташовані аналогічно до того, як розташовані великий, вказівний та середній пальці лівої руки, то трійка цих векторів називається лівою.

Змішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює векторному добутку **[*ab*]**, помноженому скалярно на вектор ***c***, тобто **[*ab*]*c***.

Справджується тотожність: **[*ab*]*c*=*a*[*bc*]**; зважаючи на це для позначення змішаного добутку **[*ab*]*c*** використовується простіший символ: ***abc***. Таким чином, ***abc*=[*ab*]*c***, ***abc*=*a*[*bc*]**.

Змішаний добуток ***abc*** дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах ***a***, ***b***, ***c***, взятому зі знаком плюс, якщо трійка ***abc*** права, зі знаком мінус, якщо ця трійка ліва. Якщо вектори ***a***, ***b***, ***c*** компланарні (і тільки в цьому випадку), змішаний добуток ***abc*** дорівнює нулю; іншими словами, рівність ***abc*=0** є необхідною і достатньою умовою компланарності векторів ***a***, ***b***, ***c***.

Якщо вектори ***a***, ***b***, ***c*** задані своїми координатами ***a***$=\{X_1; Y_1; Z_1\}$, ***b***$=\{X_2; Y_2; Z_2\}$, ***c***$=\{X_3; Y_3; Z_3\}$, то мішаний добуток ***abc*** визначається формулою

$$[abc] = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Нагадаємо, що система координатних осей вважається правою (разом з тим є правою і трійка векторів $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$).

Загальне рівняння площини. Рівняння площини, що проходить через дану точку і має даний нормальний вектор.

В декартових координатах кожна площина визначається рівнянням першого степеня і кожне рівняння першого степеня визначає площину.

Будь-який (не рівний нулю) вектор, перпендикулярний до даної площини, називається її нормальним вектором. Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (3.1)$$

визначає площину, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має нормальний вектор $n = \{A; B; C\}$.

Розкриваючи в рівнянні (3.1) дужки і позначаючи число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ літерою D, представимо його у вигляді $Az + By + Cz + D = 0$. Це рівняння називається загальним рівнянням площини.

Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

Нормальним рівнянням площини називається її рівняння, записане у вигляді $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, де cosα, cosβ, cosγ є направляючими косинусами нормалі площини, p – відстань до площини від початку координат. При обчисленні направляючих косинусів нормалі слід вважати, що вона направлена від початку координат до площини (якщо ж площина проходить через початок координат, то вибір додатнього напрямку нормалі не має значення).

Нехай M^* - будь-яка точка простору, $\boldsymbol{d}$ – відстань від неї до даної площини. Відхиленням $\boldsymbol{\delta}$ точки M^* від даної площини називається число $+\boldsymbol{d}$, якщо точка M^* і початок координат лежать по різні боки від даної площини, і число $-\boldsymbol{d}$, якщо вони лежать по один бік від даної площини (якщо M^* лежить на самій площині, то відхилення дорівнює нулю).

Якщо точка M^* має координати $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$, $\boldsymbol{z}^*$, а площина задана нормальним рівнянням

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

то відхилення точки M* від цієї площини подається формулою

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p.$$

Очевидно d=|δ|.

Загальне рівняння площини $Az + By + Cz + D = 0$ зводиться до нормального вигляду (3.1) множенням на нормуючий множник, що визначається за формулою

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

знак нормуючого множника береться протилежним знаку вільного члена нормованого рівняння.

Направляючий вектор прямої. Канонічні рівняння прямої. Параметричні рівняння прямої.

Кожен вектор, що не дорівнює нулю і лежить на даній прямій або на паралельній їй, називається направляючим вектором цієї прямої.

Направляючий вектор довільної прямої в подальшому позначається літерою ***a***, його координати – літерами ***l***, ***m***, ***n***:

$a = \{l; m; n\}$

Якщо відома одна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої і направляючий вектор $a = \{l; m; n\}$, то пряма може бути визначена (двома) рівняннями виду:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (3.2)$$

У такому вигляді рівняння прямої називаються канонічними.

Канонічні рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, мають вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3.3)$$

Позначимо літерою **t** кожне з рівних відношень у канонічних рівняннях (3.2); ми отримаємо:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

Звідси

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad (3.4)$$

Це – параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ у напрямку вектора $a = \{l; m; n\}$. В рівняннях (3.4) **t** розглядається як параметр, що довільно змінюється, ***x***, ***y***, ***z*** – як функції від **t**; при зміні **t** величини ***x***, ***y***, ***z*** змінюються так, що точка $M = (x; y; z)$ рухається по заданій прямій.

Якщо параметр **t** розглядати як змінний час, а рівняння (3) як рівняння руху точки *M*, то ці рівняння будуть визначати прямолінійний і рівномірний рух точки *M*. При **t**=0 точка *M* співпадає з точкою M_0. Швидкість *v* точки *M* постійна і визначається формулою $v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.

3.2. Коло, еліпс, гіпербола та парабола на площині

Загальні положення

Рівняння виду

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.5)$$

якщо одночасно коефіцієнти A, B, C не дорівнюють нулеві, називається *рівнянням другого степеня*. Криві, які описуються рівняннями другого степеня, називаються *кривими другого порядку*. До кривих другого порядку відносяться: коло, еліпс, гіпербола та парабола.

Властивості кривих другого порядку можна вивчати через дослідження рівняння другого степеня (3.5). Ми будемо вивчати криві другого порядку, як геометричні місця точок, які задовольняють певній властивості.

Множина точок, які мають певну властивість, серед якої немає жодної точки, що не має цієї властивості, називається *геометричним місцем точок*.

Коло

Геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від однієї точки O_1, називається *колом*.

Точка O_1 називається *центром кола*, а відстань точок кола до центра називається *радіусом*. В наведеному означенні кола використана його характеристична властивість.

Нехай дано коло радіуса R з центром в точці $O_1(a;b)$ (рис. 3.1)

Знайдемо його рівняння.

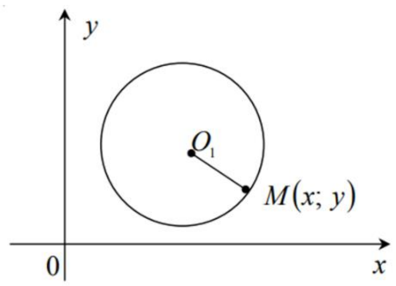


Рис. 3.1

Для довільної точки M(x;y) кола виконується рівність $O_1M=R$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, одержимо:

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$=R або після піднесення до квадрату (двох додатніх частин рівняння) одержимо рівносильне рівняння:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (3.6)$$

Відповідно, координати кожної точки кола задовольняють рівнянню (3.6). Неважко показати, що координати точки, яка не лежить на колі, цьому рівнянню не задовольняють.

Рівняння (3.6) називають канонічним або нормальним рівнянням кола. Зокрема, рівняння кола з центром в початку координат (a=0, b=0) має вигляд:

$$x2 + y2 = R2 \tag{3.6a}$$

Визначимо, за яких умов рівняння (3.5) буде рівнянням кола. З цією метою рівняння (3.6) запишемо у вигляді:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \tag{3.7}$$

Якщо рівняння (3.7) співставити з рівнянням (3.5), то прийдемо до такого висновку.

Висновок. Щоб рівняння (3.5) було рівнянням кола, необхідна рівність коефіцієнтів при x^2 та y^2 (A = C), коефіцієнт при xy повинен дорівнювати нулеві (B = 0).

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума довжин до двох фіксованих точок F_1 та F_2 є величина стала, що дорівнює $2a$. Точки F_1 та F_2 називаються *фокусами* еліпса, відстань між ними $F_1F_2 = 2c$ – *фокусною відстанню*. В канонічній системі координат, початок якої співпадає з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис проходить через точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, рівняння еліпса має вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.8}$$

і називається *канонічним рівнянням* еліпса. У цьому рівнянні $b^2 = a^2 - c^2$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ перетину еліпса з осями координат називаються *вершинами* еліпса. Відрізки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ – відповідно *велика (фокальна) і мала осі* еліпса. *Ексцентриситетом* ε еліпса називається відношення $e = \frac{c}{a}$. Очевидно, що для еліпса $0 < e < 1$. Відстані довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* r_1 та r_2 і обчислюються за формулами

$$r_1 = a - ex,\ r_2 = a + ex.$$

Директрисами еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні великій осі

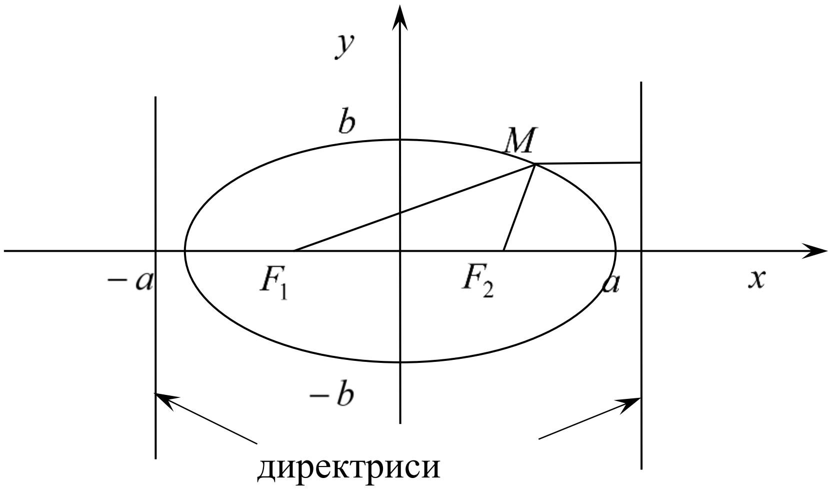


Рис. 3.2 – Еліпс

еліпса та такі, що відстоять від його центру на відстані $\frac{a}{e}$. Таким чином, рівняння директрис еліпса записуються у вигляді: $x = -\frac{a}{e},\ x = \frac{a}{e}$.

Нехай $N(x_0, y_0)$ – довільна точка еліпса. *Дотична* до еліпса у цій точці задається рівнянням $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. У випадку, коли дотична має проходити через точку $N(x_0, y_0)$, що не належить еліпсу, для відшукання кутового коефіцієнту дотичної треба скористатися умовою, що дотична $y - y_0 = k(x - x_0)$ та еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ повинні мати лише одну спільну точку.

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала, що дорівнює $2a$. Оберемо початок системи координат у середині відрізка $F_1F_2 = 2c$, а вісь абсцис проходить через точки F_1 та F_2. Тоді отримаємо *канонічне* рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.9)$$

У цьому рівнянні $b^2 = c^2 - a^2$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ перетину гіперболи з віссю Ox називаються *вершинами* еліпса. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ – *дійсна вісь*

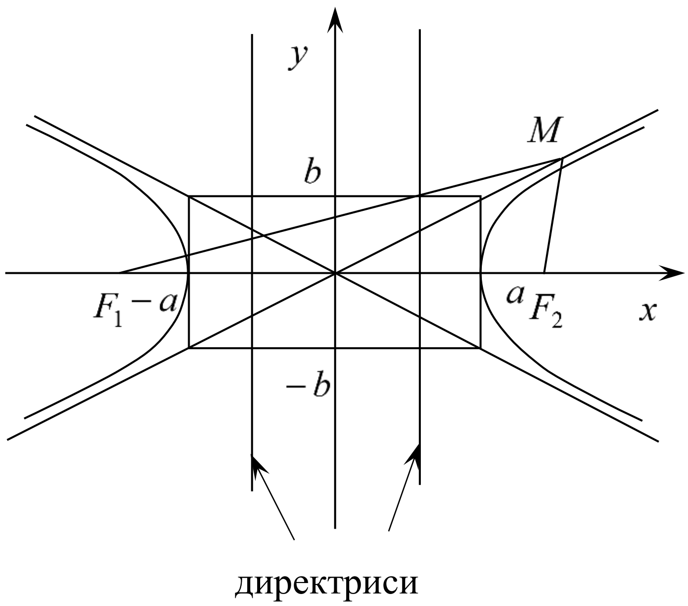


Рис. 3.3 – Гіпербола

гіперболи, а відрізок осі ординат $B_1B_2 = 2b$ – *уявна вісь*. Прямокутник, обмежений прямими $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$, називається *характеристичним прямокутником гіперболи*, а його діагоналі – *асимптотами*. Рівняння асимптот гіперболи мають вид:

$$y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x.$$

Ексцентриситетом e гіперболи також називається відношення $e = \frac{c}{a}$. Очевидно, що для гіперболи $e > 1$. Відстані довільної точки $M(x,y)$ гіперболи до фокусів називаються *фокальними радіусами* r_1 та r_2 і обчислюються за формулами:

$$r_1 = ex - a,\ r_2 = ex + a.$$

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, перпендикулярні дійсній осі гіперболи та такі, що відстоять від її центру на відстані $\frac{a}{e}$. Аналогічно еліпсу, рівняння директрис гіперболи записуються у вигляді: $x = -\frac{a}{e}$, $x = \frac{a}{e}$.

Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ називається спряженою до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Спряжена гіпербола має ті ж асимптоти, що і вихідна гіпербола. Дотичною до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в її точці $N(x_0,y_0)$ є пряма $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Парабола

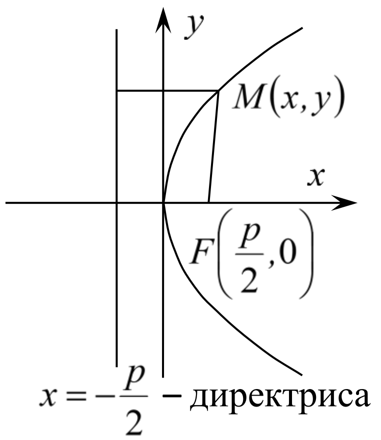


Рис. 3.4 – Парабола

Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F (фокуса) та даної прямої (директриси). Якщо по аналогії з еліпсом та гіперболою визначити ексцентриситет параболи, як відношення відстані від фокуса до директриси, то для параболи $e=1$. Проведемо на площині, в якій розміщено параболу, вісь Ox перпендикулярно директрисі. Вісь Oy декартової системи проведемо паралельно директрисі між фокусом та директрисою на відстані $\frac{p}{2}$ від фокуса, де p – відстань між фокусом та директрисою. Тоді в цій канонічній системі координат рівняння параболи матиме вид:

$$y^2=2px. \tag{3.10}$$

Рівняння дотичної до параболи, що проходить через її точку $N(x_0,y_0)$ має вигляд:

$$yy_0=p(x+x_0).$$

Приклади розв'язування задач

Складіть найпростіше рівняння еліпса, знаючи, що:

а) півосі його відповідно дорівнюють 4 і 2;

б) відстань між фокусами дорівнює 6 і більша піввісь дорівнює 5;

в) більша піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет $e=0{,}8$;

г) мала піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) сума півосей дорівнює 8 і відстань між фокусами теж дорівнює 8.

Розв'язання.

а) Використовуючи загальне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ й знаючи, що a й b – півосі, з’ясовуємо, що шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

б) Відстань між фокусами дорівнює $2c$, отже $c=3$. З рівності $b^2=a^2-c^2$ знаходимо значення $b=4$. Піввісь $a=5$ відома з умови. Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

в) За умовою $a=10$. З означення ексцентриситету $e=\frac{c}{a}$ знаходимо $c=8$. Скориставшись рівністю $b^2=a^2-c^2$, знаходимо $b=6$. Запишемо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

г) За умовою $b=3$. З означення ексцентриситету $e=\frac{c}{a}$, знаходимо залежність $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Використовуючи рівність $b^2=a^2-c^2$ і наявні дані, одержуємо рівняння $a^2-\frac{a^2}{2}=9$, звідки $a=3\sqrt{2}$. Шукане рівняння еліпсу має вигляд: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

д) З умови відомо, що $a+b=8$ й $2c=8$, звідки $c=4$. Використовуючи рівність $b^2=a^2-c^2$, одержимо $a^2-b^2=16$. Розв'язавши систему $\begin{cases} a+b=8, \\ a^2-b^2=16, \end{cases}$ знаходимо значення $a=5$ й $b=3$. Запишемо шукане рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Складіть рівняння параболи, знаючи, що:

а) відстань фокуса від вершини дорівнює 3;

б) фокус має координати $(5;0)$, а вісь ординат служить директрисою;

в) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат і через точку $M(1;-4)$;

г) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус знаходиться в точці $(0;2)$ й вершина збігається з початком координат;

д) парабола симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і через точку $M(6;-2)$.

Розв'язання:

а) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$, де p – фокальний параметр, що дорівнює відстані від фокуса до директриси. Як відомо, відстань фокуса від вершини дорівнює половині відстані фокуса від директриси, отже, $p=6$ і шукане рівняння параболи має вигляд: $y^2=12x$.

б) Так як вісь ординат служить директрисою, а відстань від фокуса до директриси – це фокальний параметр, то $p=5$. Вершина параболи повинна перебувати в середині між фокусом і директрисою, виходить, її координати $(2{,}5;0)$ й, отже, шукане рівняння має вигляд: $y^2 = 10(x-2{,}5)$ або $y^2 = 10x - 25$.

в) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Якщо парабола проходить через точку $M(1;-4)$, то координати цієї точки задовольняють її рівнянню, тобто $16 = 2p$, звідки $p = 8$. Отже, шукане рівняння: $y^2 = 16x$.

г) Так як фокус розташований на відстані дві одиниці від вершини, то $p = 4$. З умови відомо, що парабола симетрична відносно осі Oy, звідки шукане рівняння: $x^2 = 8y$.

д) Рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричної відносно осі Oy, має вигляд: $x^2 = 2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки $M(6;-2)$, через яку проходить парабола, знаходимо значення $p = -9$. У підсумку шукане рівняння має вигляд: $x^2 = -18y$.

Складіть рівняння гіперболи, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що:

а) відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами 10;

б) дійсна піввісь дорівнює 5 і вершини поділяють відстані між центром і фокусами навпіл;

в) дійсна вісь дорівнює 6 і гіпербола проходить через точку $(9;-4)$;

г) гіпербола проходить через дві точки $P(-5;2)$ й $Q(2\sqrt{5};\sqrt{2})$.

Розв'язання:

а) З умови завдання маємо, що $A_1A_2 = 2a = 8$, звідки $a = 4$. Крім того $F_1F_2 = 2c = 10$, тобто $c = 5$. Використовуючи співвідношення $b^2 = c^2 - a^2$, знаходимо значення $b = 3$. Отже, підставляючи знайдені значення в канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, одержуємо шукане рівняння: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

б) З умови маємо, що $a = 5$ й $OF_1 = c = 2a = 10$. Використовуючи рівність $b^2 = c^2 - a^2$, знаходимо значення $b = 5\sqrt{3}$, звідки шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$.

в) За умовою дійсна вісь дорівнює 6, отже, піввісь $a = 3$. Так як гіпербола проходить через точку $(9;-4)$, то координати цієї точки задовольняють загальному рівнянню гіперболи. Використовуючи наявні дані, приходимо до рівняння $\frac{81}{9} - \frac{16}{b^2} = 1$, звідки $b^2 = 2$. Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$.

г) Підставляючи в канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ координати даних точок, приходимо до системи $\begin{cases} \frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1, \\ \frac{20}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1. \end{cases}$ Виразимо з першого рівняння системи $a^2=\frac{25b^2}{b^2+4}$ й підставимо його в друге рівняння. Отримаємо $b^2=6$, тоді $a^2=15$ й шукане рівняння прийме вид: $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$.

Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ з прямою $2x-y-9=0$.

Розв'язання:

Щоб знайдіть потрібну нам точку, необхідно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1, \\ 2x-y-9=0. \end{cases}$ Виразимо із другого рівняння y й підставимо отриманий вираз в перше рівняння системи: $\begin{cases} x^2+3(2x-9)=36, \\ y=2x-9. \end{cases}$. Розв'яжемо квадратне рівняння системи відносно x:

$13x^2-108x+207=0$,

$D=(108)^2-4\cdot 13\cdot 207=900$,

$x_1=\frac{108+30}{26}=\frac{69}{13}$, $x_2=\frac{108-30}{26}=3$.

Використовуючи друге рівняння системи, знаходимо $y_1=\frac{21}{13}$, $y_2=-3$. Таким чином, точки перетину еліпса з прямою мають координати: $\left(\frac{69}{13};\frac{21}{13}\right)$ і $(3;-3)$.

Складіть рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв’язання:

Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2=2px$ покладемо $x=6$, $y=8$. Тоді $2p=\frac{32}{3}$. Отже, рівняння шуканої параболи

$y^2 = \frac{32x}{3}$.

Задачі для самостійного розв'язування (до розділу 3)

Скласти рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника A(5;-4), B(-1;3), C(-3;-2) паралельно протилежним сторонам.

Обчислити відхилення δ і відстань d від точки A(2;-1) до прямої 4x+3y+10=0.

Вектори *a* і *в* утворюють кут φ=$\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 1$, обчислити кут α між векторами $p = a + b$, $q = a - b$.

Вектори *a* і *в* взаємно перпендикулярні; вектор c утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$; знаючи, що $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$, обчислити: а). $(3a - 2b)(b + 3c)$; б). $(a + b + c)^2$.

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P(-2;3) на однакових відстанях від точок A(5,-1) і B(3,7).

Вектори *a* і *в* утворюють кут φ=$\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|a| = 6$, $|b| = 5$, обчислити |ab|.

Вектор утворює з осями Ox і Oz кути $\alpha = 120^0$ і $\gamma = 45^0$. Який кут він утворює з віссю Oy?

Обчислити відстань площини 15x – 10y + 6z – 190 = 0 від початку координат.

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;1;-1)$ і має нормальний вектор $n = \{1;-2;3\}$.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку (–2; +7; +3) паралельно площині x-4y+5z–1=0;

Написати рівняння площини, що проходить через точку (+3; +1; –2) і через пряму $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$

Звести до канонічного виду рівняння прямої 2x – 3y – 3z – 9 = 0, x – 2y + z + 3 = 0.

Дано три вектори : $a = \{1;-1;3\}$, $b = \{-2;2;1\}$, $c = \{3;-2;5\}$. Обчислити *авс.* Визначити, чи компланарні вектори *а, в, с*.

Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого розміщені в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ і $D(4;1;3)$.

Перевірити, що прямі $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ і $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ перетинаються, і написати рівняння площини, що проходить через них.

Написати рівняння площини, що проходить через наступні дві паралельні прямі: $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ і $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$.

Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ і паралельна прямій $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$.

Визначити кут, утворений прямими:

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ і $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$

При яких значеннях коефіцієнтів А і В площина Ax + By – 6z - 7 = 0 перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини 2x + y – 3z +1 = 0 з прямими $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$ *і* $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$.

Складіть рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

- його півосі дорівнюють 5 і 2;
- його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8;
- його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами – 10;
- відстань між фокусами дорівнює 6 і ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;
- його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;
- його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e=\frac{12}{13}$;
- відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами – 4;
- його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами – 16;
- його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами – 15;
- відстань між директрисами дорівнює 32 і $e=\frac{1}{2}$;
- точка $M\left(-2\sqrt{5};\,2\right)$ належить еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
- точка $M(2;\,-2)$ належить еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
- точки $M\left(4;\,-\sqrt{3}\right)$ і $N\left(2\sqrt{2};\,3\right)$ належать еліпсу;
- відстань від директриси до найближчої вершини дорівнює 4, а до вершини, що лежить на осі, паралельній директрисі, дорівнює 8;
- трикутник з вершинами у фокусах і в кінці малої осі правильний, а діаметр кола, що проходить через центр і дві вершини еліпса – 7.

Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

- її вісі $2a=10$ і $2b=8$;
- відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$;

- відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$;
- вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$;
- рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;
- відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;
- відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b = 6$;
- відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e = \frac{3}{2}$;
- рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;
- точки $M(6; -1)$ і $N(-8; 2\sqrt{2})$ належать гіперболі;
- точка $M(-5; 3)$ належить гіперболі і ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$;
- точка $M\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;
- точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ належить гіперболі і рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{3}$;
- рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x = \pm\frac{32}{5}$.

Складіть рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:
- парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox і її параметр $p = 3$;
- парабола розташована в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox і її параметр $p = 0{,}5$;
- парабола розташована в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
- парабола розташована в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy і її параметр $p = 3$;
- парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
- парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1; 3)$;

– парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1;\,1)$;
– парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4;\,-8)$.

Точка $M\left(-\frac{5}{2};\,1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2-5y^2=20$. Знайдіть її фокальні радіуси.

Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ з прямою $x-2y+2=0$.

Знайдіть точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ з прямою $x-y+5=0$.

Через точку $M(2;\,4)$ проведіть дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Складіть рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0;\,-\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2-2y^2=1$.

Напишіть рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точці $M(4;\,4)$.

Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, що проходять через точку $N(10{,}4)$.

Дана пряма $x+y=0$. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$:

1) паралельних даній прямій;
2) перпендикулярних даній прямій.

Складіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(2;\,-1)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

Складіть рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4;\,3)$ і директриса $y+1=0$.

Складіть рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

Складіть рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет $e=\frac{1}{2}$, фокус знаходиться в точці $F(1;\,-2)$, а відповідна директриса визначається рівнянням x-y+1=0.

Визначте ексцентриситет еліпса, знаючи, що:
– його мала вісь видна з фокуса під прямим кутом;

– відстань між фокусами дорівнює відстані між вершинами малої і великої осей;
– відстань між директрисами в чотири рази більше відстані між фокусами;
– відрізок між фокусом і дальньою вершиною більшої осі ділиться другим фокусом у відношенні 2:1.

Відомо, що фокус еліпса має координати $(1;0)$, йому відповідає директриса $x=7$, а ексцентриситет $e=\frac{1}{2}$. Знайдіть другий фокус і другу директрису цього еліпса.

Знайдіть ексцентриситет еліпса, знаючи, що сторони вписаного в нього квадрата проходять через фокуси еліпса паралельно його малій осі.

Складіть рівняння прямої, що проходить через середини хорд еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, що лежать на прямих $2x-y+7=0$ і $2x-y-1=0$.

Відомо, що фокус гіперболи має координати $(3;0)$, йому відповідає директриса $x=-1/5$, а ексцентриситет $e=5/3$. Знайдіть другий фокус і другу директрису цієї гіперболи.

Напишіть рівняння гіперболи, знаючи чотири точки $(\pm 4,2)$, $(\pm 4,-2)$ перетину її директрис і асимптот.

Сторони квадрата, вписаного в гіперболу, проходять через її фокуси. Знайдіть її ексцентриситет.

На параболі $y^2=10x$ знайдіть точку M таку, що:
– пряма, що проходить через точку M та фокус параболи, утворює з віссю Ox кут 60°;
– площа трикутника з вершинами в шуканій точці M, фокусі параболи й точці перетину осі параболи з директрисою дорівнює 5;
– відстань від точки M до вершини параболи дорівнює відстані від точки M до фокуса;
– відстані від точки M до вершини параболи та до фокуса параболи відносяться як $8:7$.

Знайдіть таку хорду параболи $y^2=4x$, яка точкою $(3;1)$ ділиться навпіл.

Складіть рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, якщо дотична:
– паралельна прямій $3x-y-17=0$;
– перпендикулярна до прямої $2x+5y+11=0$.
– Складіть рівняння гіперболи, знаючи рівняння її асимптоти $y=\pm\frac{1}{2}x$ і рівняння однієї з її дотичних $5x-6y-8=0$.

Гіпербола, осі якої збігаються з осями координат, дотикається прямої $x-y-2=0$ в точці $M(4;2)$. Складіть рівняння цієї гіперболи.

Напишіть рівняння еліпса з півосями $a=2,\ b=1,$ для якого прямі $x+y-1=0$ *й* $x-y+1=0$ суть відповідно більша й мала осі.

Еліпс при русі по площині дотикається двох взаємно перпендикулярних прямих. Яку лінію описує центр еліпса?

Напишіть рівняння рівносторонньої гіперболи, знаючи її фокус $(1;1)$ і асимптоту $x+y=0$.

Визначте фокус параболи $y=x^2-4x+5$.

Напишіть рівняння параболи, знаючи її директрису $x-y+8=0$ й фокус $F_1(-1,-2)$.

Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокус $F(1,1)$, директрису $x+2y-1=0$ й ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$.

Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокуси $F_1(1,1)$ і $F_2(-2,-2)$ й одну з її директрис $x+y-1=0$.

Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокус $F(-3,-7)$, центр $(-1,-3)$ і одну з директрис $x+2y-4=0$.

РОЗДІЛ IV. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Під математичним аналізом розуміють сукупність розділів математики, що займаються дослідженнями функцій методами диференціального та інтегрального числення. Математичний аналіз дає ряд фундаментальних понять, якими оперують управлінці та економісти – функція, границя, похідна, інтеграл, числовий та функціональний ряди, диференціальне рівняння. Багато математичних методів оптимізації та дослідження операцій базується на математичному аналізі. Зокрема, диференціальне числення застосовується при моделюванні динамічних процесів, які притаманні задачам з галузі упавлінської діяльності. Інтегрування має широкий спектр використання в управлінні та економіці, зокрема для відшукання функцій витрат, прибутку, споживання, якщо відомі відповідні функції граничних витрат, граничного прибутку, граничного споживання тощо.

В даному розділі основна увага приділяється диференціальному та інтегральному численню, наведені теоретичні відомості, приклади та рекомендації щодо розв’язання типових задач, завдання для самостійного виконання, варіанти завдань для проведення підсумкового контролю з даної теми.

4.1. Множина

Приклади розв’язування задач

1.1. Методом математичної індукції довести, що

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Розв'язання.

[*Крок 1.* *Перевіряємо правдивість твердження для n* = 1.]

Для n = 1 рівність правдива:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

[**Крок 2**. Припускаючи правдивість твердження для n =k, доводимо твердження для n = k + 1.]

Нехай ця рівність правдива при n=k:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Доведімо, що рівність правдива і при n=k + 1, тобто

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Справді,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

[**Крок 3**. Висновуємо правдивість твердження для будь-якого n.]

1.2. Записати усі підмножини множини M = {1, 2, 3}.

Розв'язання.

Порожня множина ∅ є підмножиною будь-якої множини.

Одноелементні підмножини множини M : {1}, {2}, {3}.

Двоелементні підмножини множини M : {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

Триелементна множина M = {1, 2, 3} є своєю підмножиною.

Множина M має $2^3 = 8$ підмножин: ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2, 3}.

Задачі для самостійного розв'язування (до підрозділу 4.1)

1.3. Замініть крапки виразами «достатньо, але не необхідно», «необхідно, але не достатньо», «необхідно й достатньо» і запишіть висловлювання символічно так, щоб утворились істинні твердження:

1) для того щоб виграти в лотереї, ... мати хоча б один лотерейний квиток;

2) для того щоб сума двох дійсних чисел була числом раціональним, ... щоб кожен доданок був раціональним числом;

3) для того щоб трикутник був рівнобедреним, ... щоб кути при основі були рівні.

1.4. З'ясуйте зміст висловлювань і встановіть, істинні вони чи хибні (x,y ∈ R)

1) ∀x∃y: x+y = 3;

2) ∃y ∀x : x+y = 3;

3) ∃x,y: x+y = 3;
4) ∀x,y : x + y = 3.

1.5. Методом математичної індукції доведіть, що для будь-якого n :
1) $n(2n^2 – 3n + 1)$ ділиться націло на 6;
2) n^5-n – ділиться націло на 5
3) $1^2 + 2^2 + … + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
4) $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + … + 1/n^2 \le 2 – 1/n$

1.6. Опишіть переліком елементів множину:

1) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 4x = -3\right\}$; 2) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 3x = 10\right\}$;

3) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 + 1 = 0\right\}$; 4) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 2x + 2 = 0\right\}$;

5) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^3 + x - 2 = 0\right\}$; 6) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^3 - 3x - 2 = 0\right\}$.

1.7. Запишіть усі підмножини множини M, якщо:
1) M = {3, 4};
2) M = {5, 6, 12}.

1.8. Задано множини A та B. Знайдіть множини A∪B, A∩B, A\B, B\A, якщо:
1) A = {1, 2, 3}, B ={2, 3, 4, 5};
2) A = {1, 2, 3, 6}, B = {1, 2, 4, 5};
3) A = {x∈R : x > 1}, B = {x∈R : x < 2};
4) A = (-2;3], B=[2;4);
5) A = { a, b, c}, B = { b, c, d, e};
6) A = {x∈R :|x + 1| < 1}, B = { x∈R: |x – 1|≥ 2}

4.2. Похідна та диференціал функції однієї змінної

Теоретичні відомості.

Похідні основних елементарних функцій

$C' = 0,\ (C = const)$	$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(e^x\right)' = e^x$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

Теорема 1.

Якщо функції y=f(x) і y=g(x) мають похідну в точці x, тоді і їх сума має похідну в точці x, причому похідна суми дорівнює сумі похідних:
(f(x)+g(x))′=f′(x)+g′(x)

Теорема 2.

Якщо функція y=f(x) маює похідну в точці x, тоді і функція y=kf(x) має похідну в точці x, причому: (kf(x))′=kf′(x)

Теорема 3.

Якщо функції y=f(x) і y=g(x) мають похідну в точці x, тоді і їх добуток має похідну в точці x, причому: (f(x)g(x))′=f′(x)·g(x)+f(x)·g′(x)

На практиці цю теорему формулюють так:
похідна добутку двох функцій дорівнює сумі двох доданків; перший доданок є добуток похідної першої функції на другу функцію, а другий доданок є добуток першої функції на похідну другої функції.

Якщо функції y=f(x) і y=g(x) мають похідну в точці x і в цій точці g(x)≠0, тоді і функція y=f(x)/g(x) має похідну в точці x, причому:
$(f(x)/g(x))'=(f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x))/g^2(x)$
$(k_1u+k_2v)'=k_1u'+k_2v'$
(uv)'=u'v+uv'
$(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$

Приклади обчислення похідних:

Припустимо: $u=x^2$, v=sin(x)
Тоді похідні нижченаведених виразів рахуються наступним чином:
1.$(2x^2-3\sin(x))'=2(x^2)'-3(\sin(x))'=2\cdot 2x-3\cos(x)=4x-3\cos(x)$
2.$(x^2\sin(x))'=(x^2)'\sin(x)+x^2(\sin(x))'=2x\sin(x)+x^2\cos(x)$
3.$(x2/\sin(x))'=((x^2)'\sin(x)-x^2(\sin(x))')(\sin(x))^2=(2x\sin(x)-x^2\cos(x))/\sin^2(x)$

Приклади розв'язування задач

1.1. Користуючись означенням $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$, знайти похідну функції у точці x_0. Обчислити f $'(1)$.

Розв'язання

$$f(x_0 + \Delta x) = 4(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 8 =$$
$$= 4x_0^2 - 3x_0 + 8 + 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$
$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$
$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 8x_0 - 3 + 4\Delta x.$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(8x_0 - 3 + 4\Delta x) = 8x_0 - 3.$$
$$f'(1) = 5.$$

1.2. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = x^4$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$;
3) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$;
4) $f(x) = 5x^3$;
5) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$;
6) $f(x) = -\dfrac{5}{4x^3}$.

Розв'язання

1) $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$.

2) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) $f'(x) = (\sqrt[4]{x^3})' = (x^{3/4})' = \dfrac{3}{4}x^{-1/4} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

4) $f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

5) $f'(x) = (4\sqrt[3]{x^2})' = 4(x^{2/3})' = 4 \cdot \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}}$.

6) $f'(x) = \left(-\dfrac{5}{4x^3}\right)' = -\dfrac{5}{4}(x^{-3})' = -\dfrac{5}{4} \cdot (-3)x^{-4} = \dfrac{15}{4x^4}$.

Задачі для самостійного розв'язування (до підрозділу 4.2)

1.3. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1;$ 2) $f(x) = ax^2 + bx + c;$

3) $f(y) = 2\sqrt{y} - \frac{1}{y} + \sqrt[4]{3};$

4) $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1);$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$ 6) $s(t) = \frac{3t^2 + 1}{t - 1}.$

1.4. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = (5x^2 + 7)^3;$ 2) $f(x) = (1 + 5x - 8x^2)^5;$

3) $f(x) = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4;$ 4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1};$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 5}};$ 6) $f(x) = \frac{10}{(4x^3 - 5x^2 + 7x - 1)^4};$

7) $f(x) = (5x^2 - 7x + 2)(15x^2 + 5)^3;$ 8) $f(x) = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7 + 4x^3)^2}.$

4.3. Невизначений інтеграл. Визначений інтеграл

Теоретичні відомості.

Для знаходження первісних функцій використовують основну таблицю інтегралів та правила інтегрування. Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням: $(F(x) + C)' = f(x)$.

Таблиця інтегралів

$\int du = u + C$	$\int tgu\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$\int ctgu\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tg\, u + C$
$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctg\, u + C$

$\int \frac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C$
$\int a^u du = \frac{a^u}{ln\,a} + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
$\int sinu\,du = -cos\,u + C$	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}ln\left\lvert\frac{a+u}{a-u}\right\rvert + C$
$\int cos\,u\,du = sinu + C$	$\int \frac{du}{sinu} = lntg\left\lvert\frac{u}{2}\right\rvert + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a}\right\rvert + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right\rvert + C$
$\int \sqrt{a^2 - u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$	
$\int \sqrt{u^2 + a}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a}\right\rvert + C$	

Приклади розв'язування задач

1.1. Знайти:

1) $\int x^3 dx;$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}};$

3) $\int \frac{dx}{x^2 + 3};$

4) $\int \frac{dx}{x^2 - 4};$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}};$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}};$

7) $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}.$

Розв'язання

1) $\int x^3 dx = = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$

Перевіряємо диференціюванням правильність інтегрування:

$$\left(\frac{x^4}{4}+C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3.$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \ = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right| + C.$

Задачі для самостійного розв'язування (до підрозділу 4.3)

1.2. Знайдіть безпосереднім інтегруванням:

1) $\displaystyle\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx;$

2) $\displaystyle\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} - 7\sqrt[4]{x^3}\right)dx;$

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx;$

4) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx;$

5) $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx;$

6) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx;$

7) $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx;$

8) $\displaystyle\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}dx;$

9) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x^2}dx;$

10) $\displaystyle\int \frac{x^6}{x^2-1}dx.$

ЛІТЕРАТУРА:

1. Вища та прикладна математика. Частина 1. Вища математика: навч. посіб. / Кафедра обліку та інформаційних технологій у бізнесі. Упорядники: Синєкоп М.С., Запорожцев С.Ю., Зміївська І.В., Обоянська Л.А.]. Х: ФОП Бровін О.В., 2019. 220 с.

2. Вища математика : теореми, приклади і задачі : [посіб. для студентів екон. спец. ВНЗ] / Б. М. Тріщ ; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2017. 506 с.

3. Вища математика : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – Вид. 2-ге, перероб. і доп. К.: КНЕУ. 2002. 669 с.

4. Вища математика : підруч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т.В. Денисова та ін. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 772 с.

5. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 252 с.

6. Ковальчук Т.В. Вища та прикладна математика в економічних прикладах та задачах. Практикум. Частина І: навч. посіб. / О.К. Щетініна, Т.В. Ковальчук, С.В. Білоусова та інші. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 244 с.

7. Ковальчук Т.В. Вища та прикладна математика в економічних прикладах та задачах. Практикум. Частина ІІ: навч. посіб. / О.К. Щетініна, Т.В. Ковальчук, С.В. Білоусова та інші. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2019. 360 с.

8. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв’язання: навч.-метод. посібник / Л. П. Дзюбак, С. П. Іглін, Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська. Х.: НТУ "ХПІ", 2013. 240 с.

9. Мацкул В. М. Вища математика для економістів : підруч. / В. М. Мацкул. Одеса: ОНЕУ, 2018. 472 с.

10. Олефір О. І. Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Математичний аналіз», тема «Невизначений інтеграл» / О. І. Олефір, Г. Д. Урум. Одеса: Університет Ушинського, 2022. 50 с.

11. Ситникова Ю. В. Лінійна та векторна алгебра у схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання) / Ю. В. Ситникова, С. М. Ламтюгова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. 109 с.

ДОДАТОК

Грецька абетка

Α α — альфа	Ν ν — ню
Β β — бета	Ξ ξ — ксі
Γ γ — гамма	Ο ο — омікрон
Δ δ — дельта	Π π — пі
Ε ε — епсилон	Ρ ρ — ро
Ζ ζ — дзета	Σ σ — сигма
Η η — ета	Τ τ — тау
Θ θ — тета	ϒ υ — іпсилон
Ι ι — йота	Φ φ — фі
Κ ϰ — каппа	Χ χ — хі
Λ λ — лямбда	Ψ ψ — псі
Μ μ — мю	Ω ω — омега

Навчально-методичне видання

КУДІНОВ Вадим Анатолійович
ПАКРИШ Олександр Євгенійович
ТАРАСЕНКО Володимир Петрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Методичні рекомендації

Комп’ютерна верстка: *В.А. Кудінова*

Підписано до друку 19.06.2025. Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Обл.-вид. арк. 4,0. Ум. друк. арк. 3,72.
Тираж 50 прим.

Редакційно-видавниче відділення
Національної академії внутрішніх справ
03035, Київ, пл. Солом’янська, 1

Друк: ФОП Поліщук О.В.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2142 від 31.03.2015
07400, м. Бровари, вул. Незалежності, 2, кв. 148
тел. (044) 592-13-49